

게임수학과물리학

#7 평면방정식

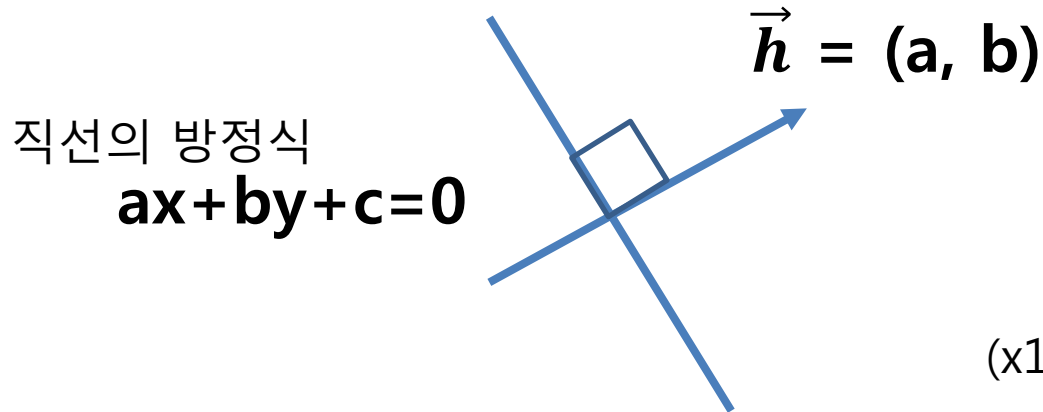
염동현

기하학의 방정식

- 직선의 방정식(2차원)
- 직선의 방정식(3차원)
- 직선의 벡터방정식
- 선분과 선분의 교차
- 평면의 방정식
- 원의 방정식
- 구의 방정식

직선의 방정식(2차원)

직선의 방정식에서 법선벡터를 찾을 수 있다.



서로 수직인 두 벡터의 내적은 0이다.

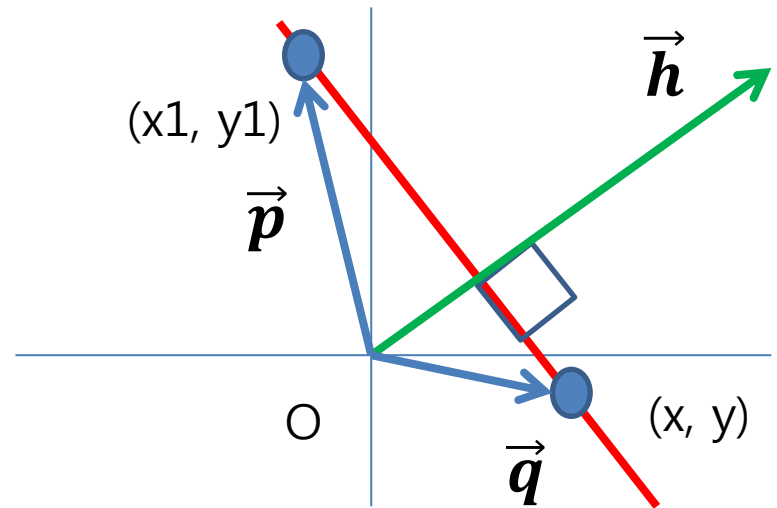
$$(\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{h} = 0$$

$$(x-x_1, y-y_1) \cdot (a, b) = 0$$

$$ax-ax_1+by-by_1 = 0$$

$$ax+by-(ax_1+by_1)=0 \quad -(ax_1+by_1)=c \text{라 하면}$$

$$ax+by+c=0$$

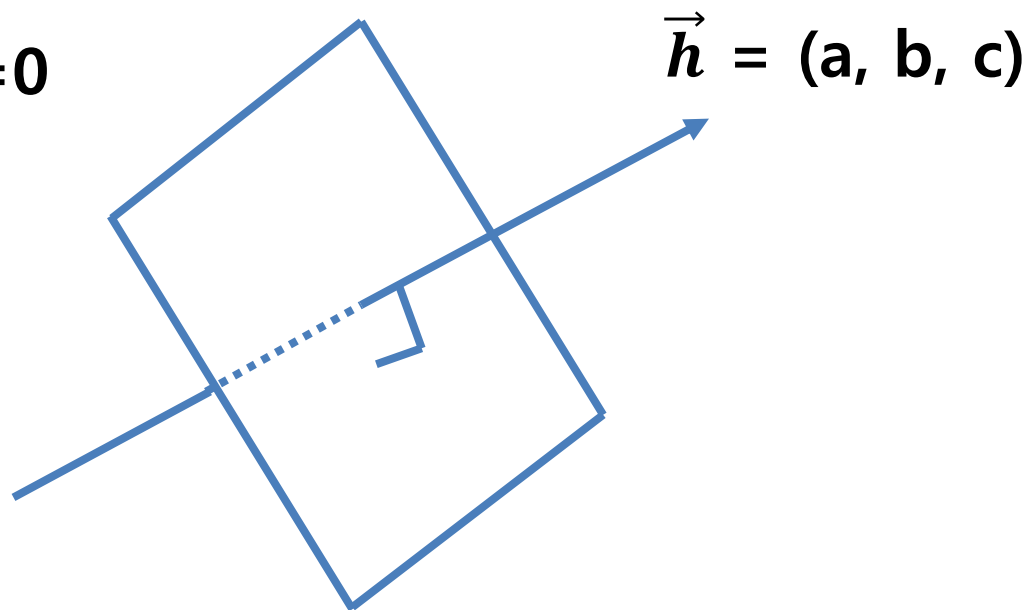


평면의 방정식(한 점과 법선벡터를 알 경우)

직선의 방정식에서 Z축을 확장하면 평면이 된다.

평면의 방정식

$$ax+by+cz+d=0$$

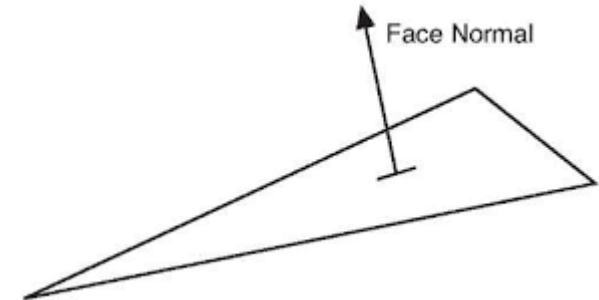
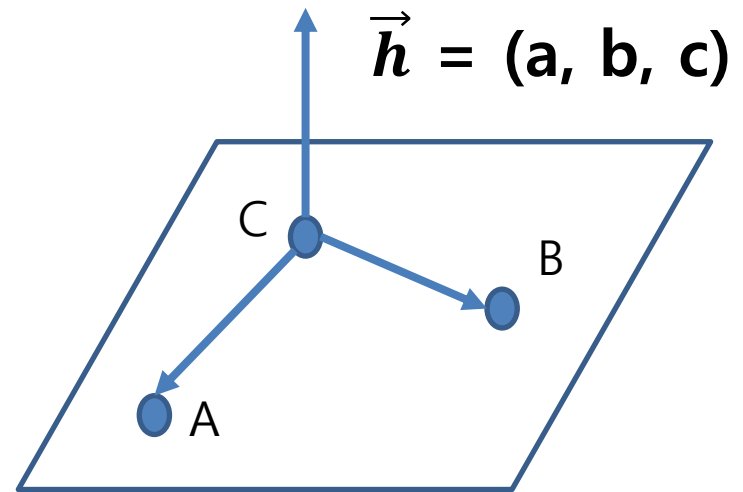
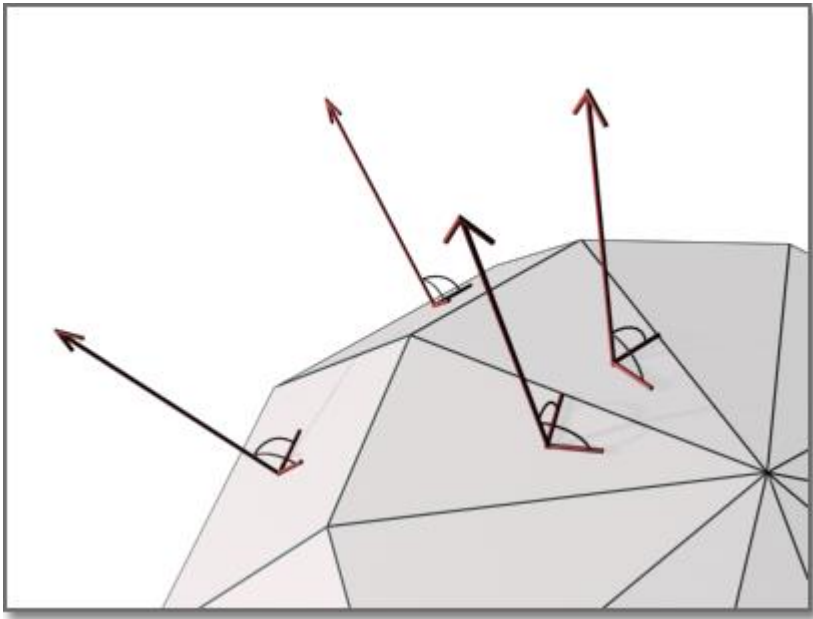


점(x_1, y_1, z_1)을 지나고 벡터 (a, b, c) 에 수직인 평면의 방정식

$$a(x-x_1) + b(y-y_1) + c(z-z_1) = 0$$

평면의 방정식(세 점을 알 경우)

- 1) 3개의 점으로 2개의 벡터를 만들고
- 2) 2개 벡터의 외적을 이용하여 수직인 벡터를 구한다.
- 3) 한 점과 법선벡터를 아는 경우로 해결



평면의 방정식 문제

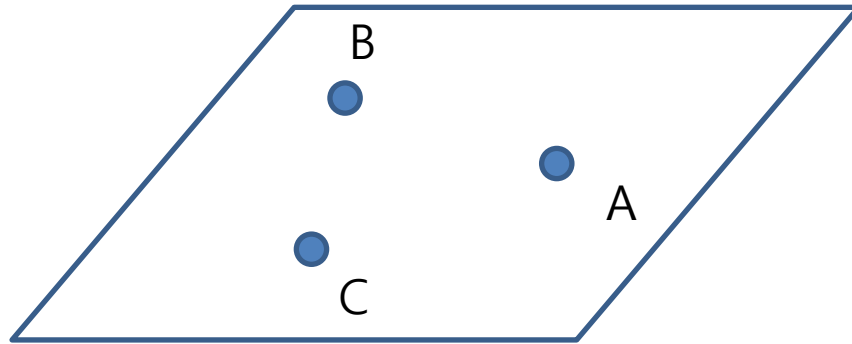
평면 위에 세 점이 있다.

A (1, 3, 4)

B (2, 0, 5)

C (1, 2, 1)

이 세 점을 지나는 평면 방정식 $ax+by+cz+d=0$ 을 구하라.



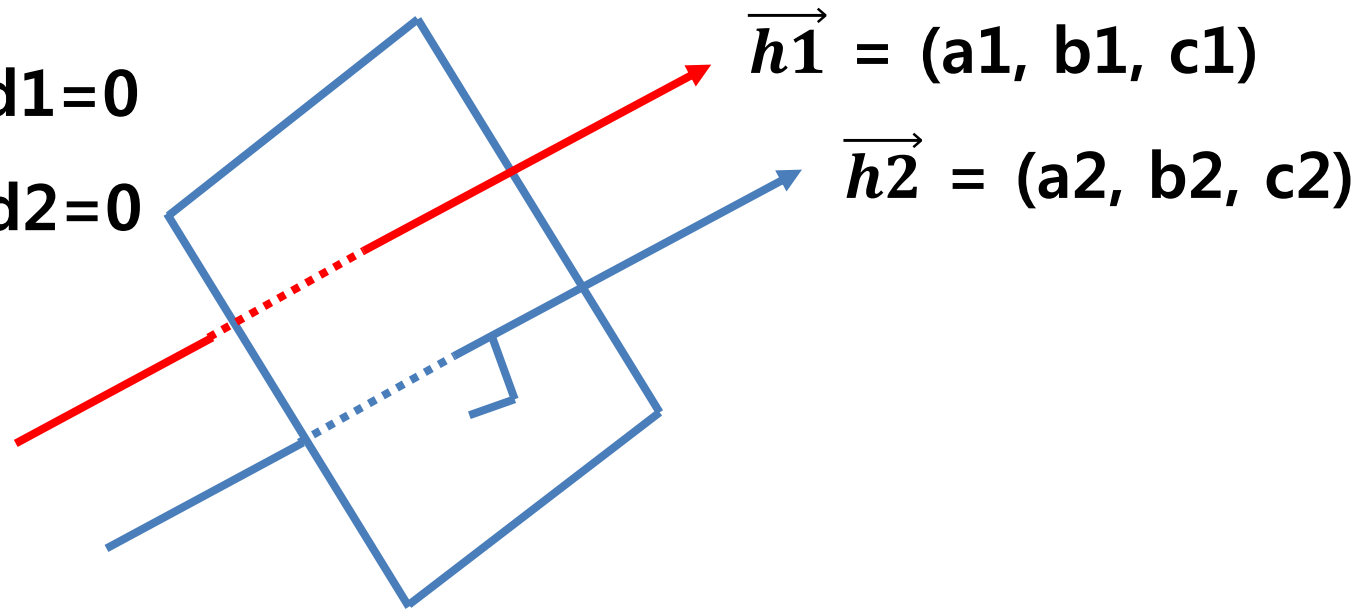
평행인 평면의 방정식

두 평면이 평행하다는 것은 두 평면의 법선 벡터가 평행하다는 것이다.

평면의 방정식

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$



벡터가 같다는 것은 적절한 배수 관계라는 것.

$$\vec{h_1} = t \vec{h_2}$$

$$(a_1, b_1, c_1) = t(a_2, b_2, c_2)$$

$$t = \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

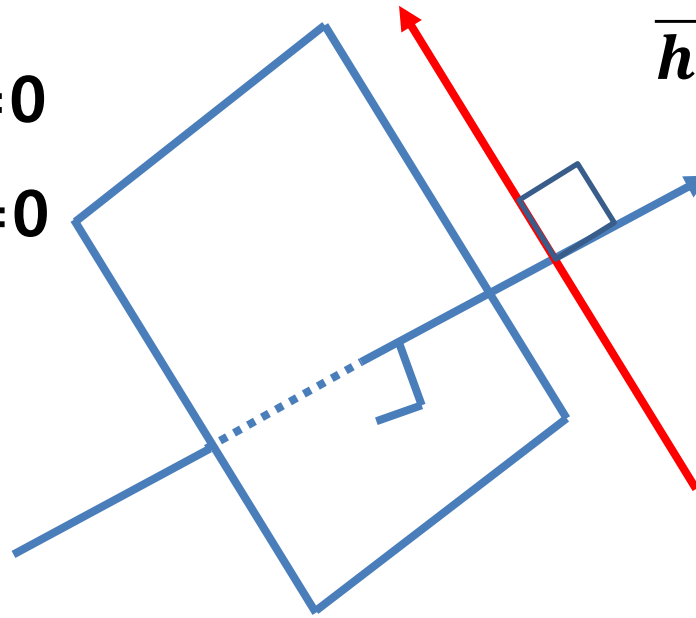
수직인 평면의 방정식

두 평면이 수직이라는 것은 두 평면의 법선 벡터가 수직이라는 것이다.

평면의 방정식

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$



$$\vec{h_1} = (a_1, b_1, c_1)$$

$$\vec{h_2} = (a_2, b_2, c_2)$$

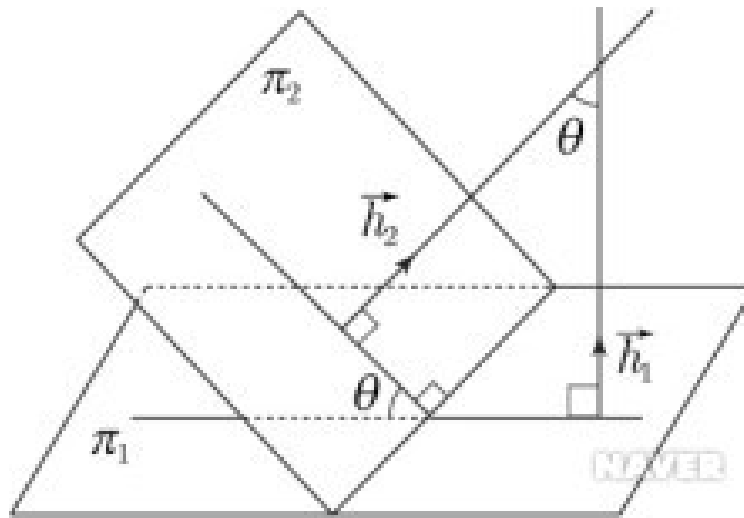
벡터가 수직임을 증명하려면
두 벡터의 내적이
0임을 보이면 된다.

$$\vec{h_1} \cdot \vec{h_2} = 0$$

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$$

두 평면이 이루는 각

두 평면의 각은 두 평면의 법선 벡터가 이루는 각과 같다.

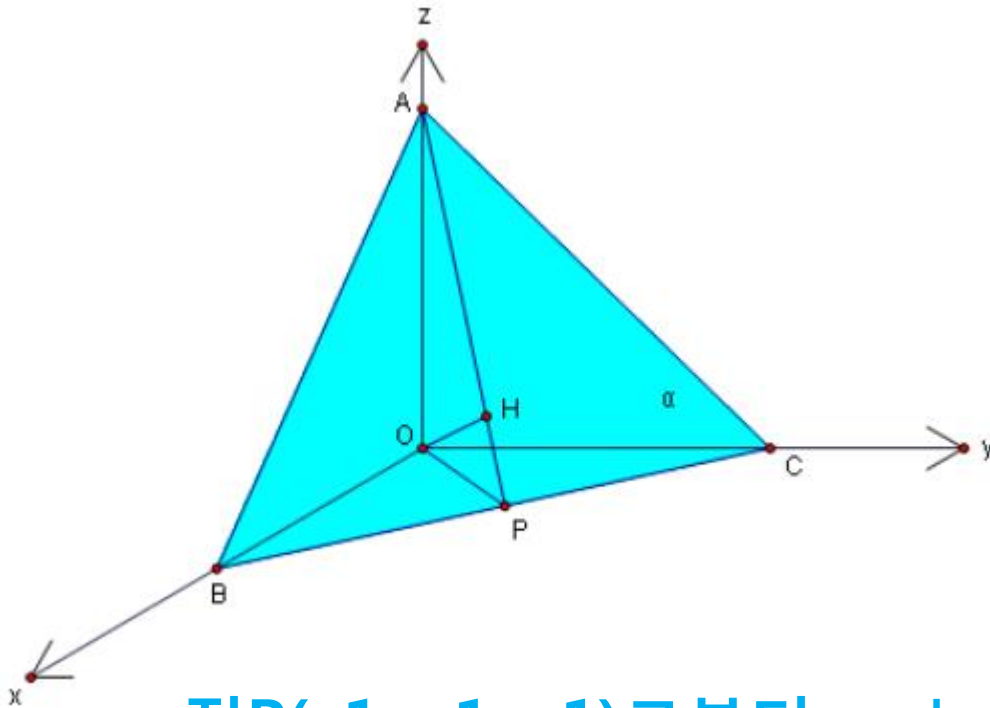


벡터의 내적 공식에 의하여

$$\vec{h_1} \cdot \vec{h_2} = |\vec{h_1}| |\vec{h_2}| \cos\theta$$

점과 평면 사이의 거리

1. $ax+by+cz+d=0$ 이라는 평면이 세 축과 만나는 부분을 활용
2. 원점에서부터 평면까지의 거리를 구한다.
3. 평면과 원점을 구하고자 하는 점(x_1, y_1, z_1)으로 평행이동한다.



점 $P(x_1, y_1, z_1)$ 로부터
평면 $ax+by+cz+d=0$
사이의 거리는

원점에서부터 평면까지의 거리
 $|d|$

$$OH = \frac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$ax+by+cz+d=0$ 을 점(x_1, y_1, z_1)으로
평행이동 시키면

$$a(x+x_1)+b(y+y_1)+c(z+z_1)+d=0$$

상수만 따로 분리하고

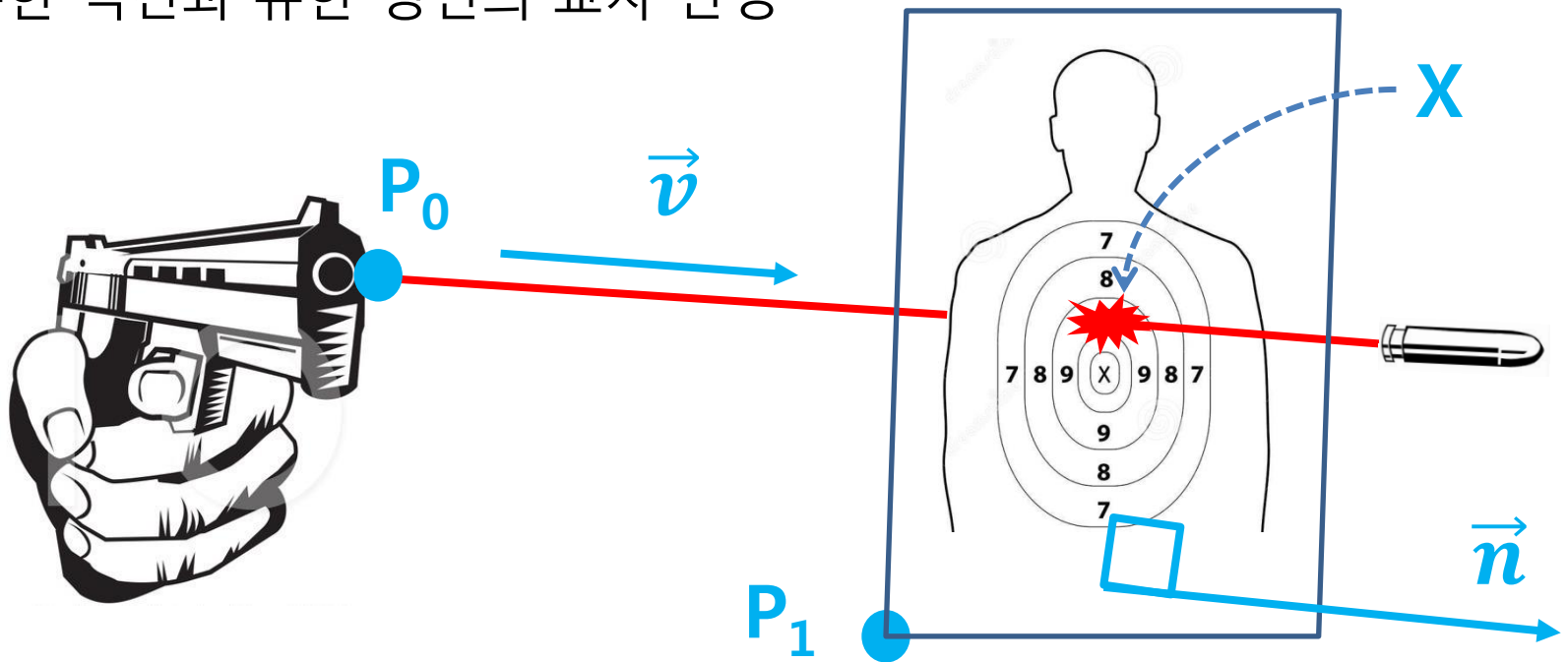
$$ax+by+cz+(ax_1+by_1+cz_1+d)=0$$

위 식의 d자리에 상수를 넣으면

$$\frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

직선과 평면의 교차판정

1. 직선과 평면이 평행한지 여부 판단
직선의 방향벡터 $\vec{v}$ 와 직선 위를 지나는 점 P_0 를 알고 있다.
평면의 법선벡터 $\vec{n}$ 과 평면 위의 점 P_1 을 알고 있다.
2. 직선과 평면의 교점 X 구하기
3. 유한 직선과 유한 평면의 교차 판정



슈팅 게임에서 총과 타겟의 충돌처리에 쓰인다.

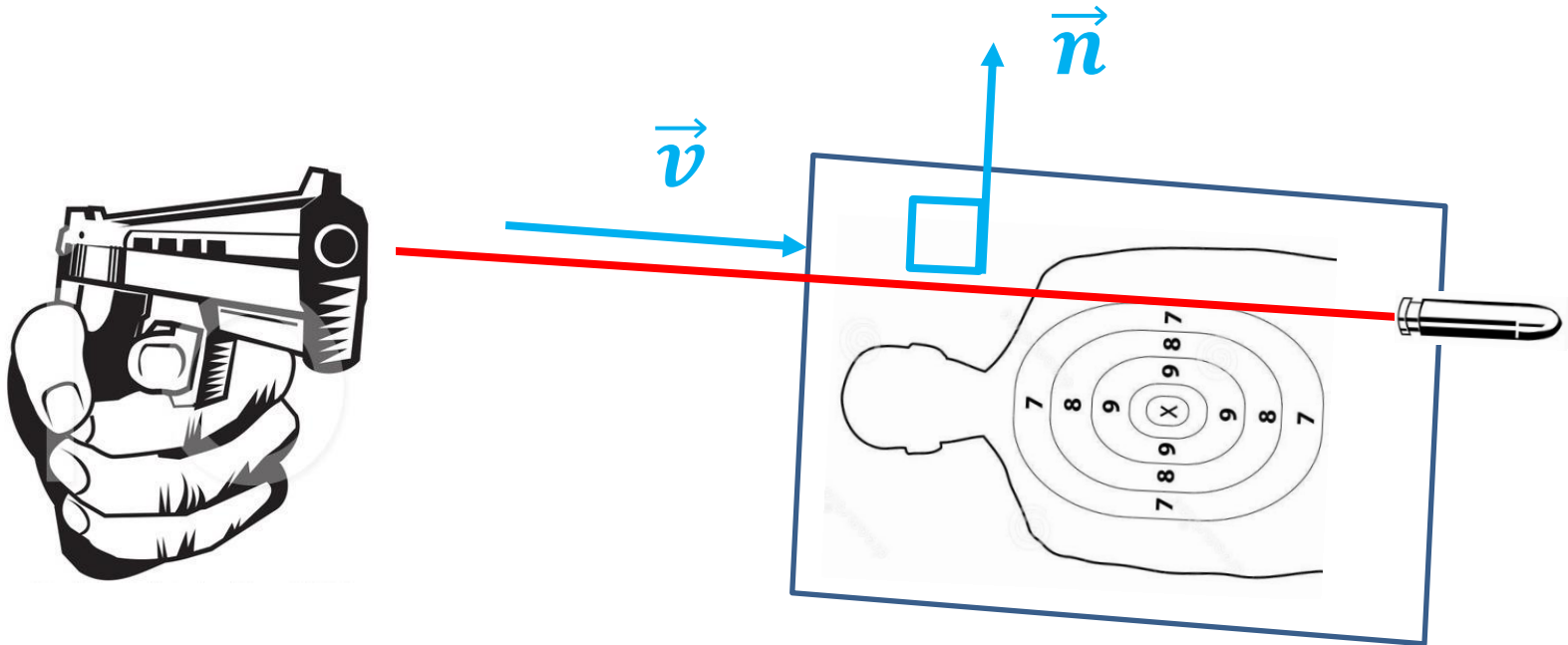
직선과 평면의 교차판정 #1

1. 직선과 평면이 평행한지 여부 판단

직선의 방향벡터 $\vec{v}$ 와 직선 위를 지나는 점 P_0 를 알고 있다.
평면의 법선벡터 $\vec{n}$ 과 평면 위의 점 P_1 을 알고 있다.

직선의 방향벡터 $\vec{v}$ 와 평면의 법선 벡터 $\vec{n}$ 에 대해서

$\vec{v}$ 와 $\vec{n}$ 이 수직이면 직선과 평면은 평행하여 만나지 않는다.



직선과 평면의 교차판정 #2

2. 직선과 평면의 교점 X 구하기

점 P0를 지나고 방향벡터가 V인 직선이 점 X를 지난다면

$$X = P0 + tV;$$

점 P1을 지나고 법선벡터가 N인 평면이 점 X를 갖는다면

$$N \cdot (X - P1) = 0$$

직선의 방정식을 X에 대해 평면의 방정식에 대입하면

$$N \cdot (P0 + tV - P1) = 0$$

$$tV \cdot N - N \cdot (P1 - P0) = 0$$

$$tV \cdot N = N \cdot (P1 - P0)$$

$$t = \frac{N \cdot (P1 - P0)}{V \cdot N}$$

직선과 평면의 교차판정 #2

2. 직선과 평면의 교점 X 구하기

구한 t를 직선의 방정식에 대입한다.

$$X = P_0 + \left(\frac{N \cdot (P_1 - P_0)}{V \cdot N} \right) V;$$

P_0, P_1, N, V 를 다 알고 있으므로 교점 X를 구할 수 있다.

하지만

이 교점 X는 무한직선과 무한평면에 대해서 구한 것으로

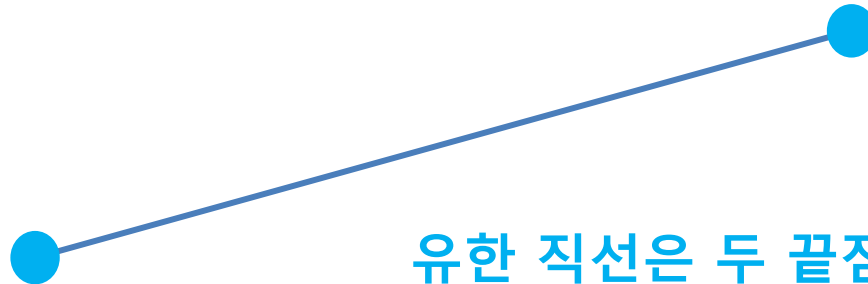
실제로 교점 X가 유효한 지는 장담할 수 없다.

실제로 게임에서는 대부분 유한 직선과 유한 평면의 충돌을 사용한다.

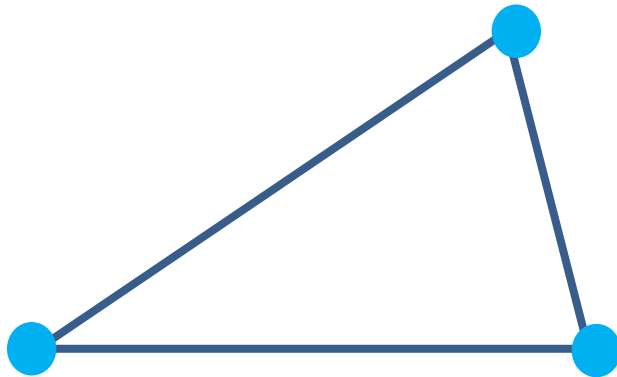
직선과 평면의 교차판정 #3

3. 유한 직선과 유한 평면의 교차 판정

앞에서 구한 교점 X가 유한 직선, 유한 평면 위에 있는지 검사



유한 직선은 두 끝점을 알아야 한다.

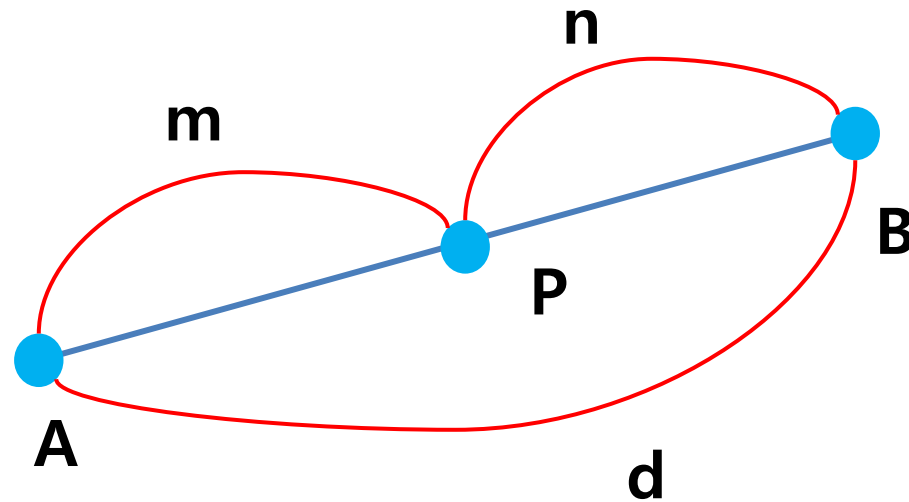


유한 평면은 세 점을 알아야 한다.
(폴리곤)

직선과 평면의 교차판정 (유한 직선)

3. 유한 직선과 유한 평면의 교차 판정

점A와 B사이의 유한 직선에 대해 어떤 점 P가
이 직선 위에 있는지 판정



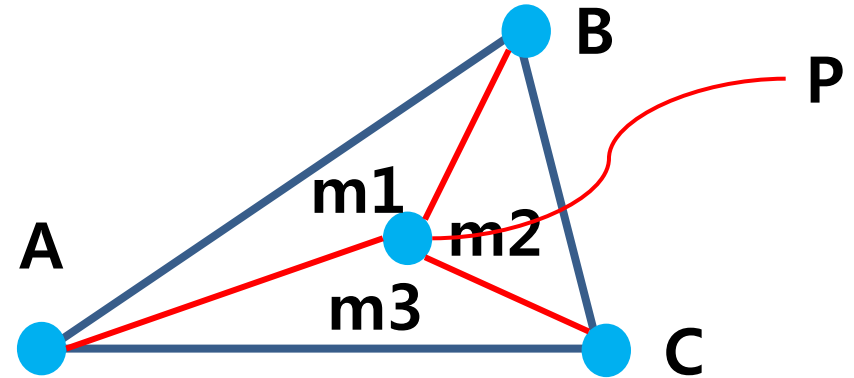
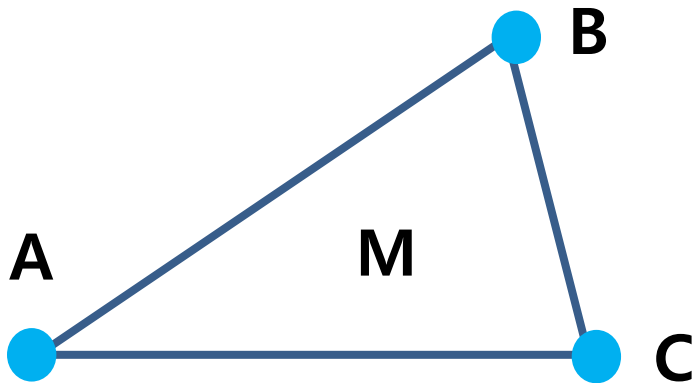
두 점 사이의 거리를 통해 체크

$m + n = d$ 이면 직선 위의 점이다.

직선과 평면의 교차판정 (유한 평면)

3. 유한 직선과 유한 평면의 교차 판정

점A와 B, C로 이루어진 유한 평면에 대해 어떤 점 P가 이 평면 위에 있는지 판정

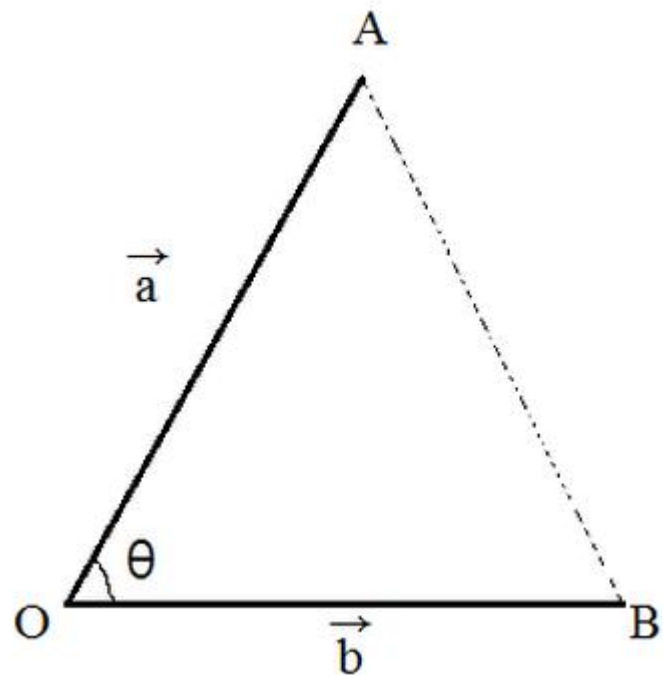


세 점을 알면 벡터 두 개를 만들 수 있고,

벡터 두 개를 알면 삼각형의 면적을 구할 수 있다.

$m1 + m2 + m3 = M$ 이면 평면 위의 점이다.

내적으로 삼각형 면적 구하기(보너스)



삼각형의 면적은 다음 공식으로 구할 수 있다.

$$S = \frac{1}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \theta$$

삼각함수의 공식에 의해

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \pm \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\ &= \pm \sqrt{1 - \left\{ \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \right\}^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sqrt{1 - \left\{ \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \right\}^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} \end{aligned}$$

**벡터의 내적으로
삼각형의 면적을 구할 수 있다.**