

1. 로그함수의 정의

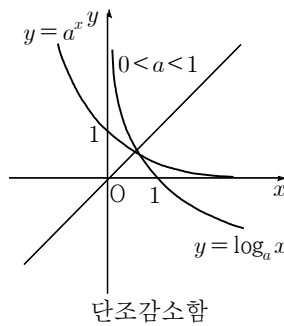
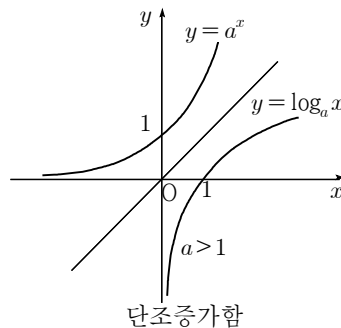
지수함수 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$)는 로그의 정의에 의하여 $x = \log_a y$ 로 나타낼 수 있고

여기서 x 와 y 를 바꾸면 $y = a^x$ 의 역함수 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)를 얻는다.

이 함수 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)를 a 를 밑으로 하는 로그함수라 한다.

2. 로그함수 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)의 성질

- (1) 정의구역은 양의 실수 전체의 집합
- (2) 치역은 실수 전체의 집합 R
- (3) $a > 1$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 값도 증가한다.
즉, $x_1 < x_2$ 이면 $\log_a x_1 < \log_a x_2$ 이다.
 $0 < a < 1$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 값은 감소한다.
즉, $x_1 < x_2$ 이면 $\log_a x_1 > \log_a x_2$ 이다.
- (4) 그래프는 점 $(1, 0)$, $(a, 1)$ 을 지나고, 점근선은 y 축이다.



- (5) $y = a^x$ 과 직선 $y = x$ 에 대해 대칭(역함수)
- (6) 로그함수 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동하면 $y = \log_a (x - m) + n$ 이다.
- (7) 로그함수 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)의 그래프를
 - ① x 축에 대하여 대칭이동 $\Rightarrow y = -\log_a x = \log_{\frac{1}{a}} x$
 - ② y 축에 대하여 대칭이동 $\Rightarrow y = \log_a (-x)$
 - ③ 원점에 대하여 대칭이동 $\Rightarrow y = -\log_a (-x)$

1. $f(x) = \log_{0.25} x$ 라 할 때, $f(a) = -4$, $f(b) = 8$ 를 만족하는

두 실수 a, b 에 대하여 $f(4\sqrt{ab})$ 의 값을 구하시오.

2. 다음 보기 중 로그함수 $f(x)=\log_a x$ 에 대한 설명으로 옳은 것만을 모두 고른 것은? (단, $a > 0$, $a \neq 1$)

<보기>

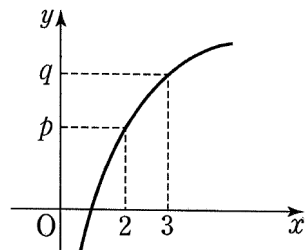
- ㄱ. 정의역과 치역이 모두 양의 실수 전체의 집합이다.
- ㄴ. $0 < a < 1$ 일 때, $u < v$ 이면 $f(u) > f(v)$ 이다.
- ㄷ. 점 $(1, 0)$ 을 지나고 x 축이 점근선이다.
- ㄹ. $f(xy) = f(x) + f(y)$
- ㅁ. $f(x+y) = f(x)f(y)$
- ㅂ. $y = \log_a x$ 와 $y = a^x$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

- ① ㄷ, ㄹ ② ㄱ, ㄴ, ㅂ ③ ㄱ, ㅁ, ㅂ
- ④ ㄴ, ㄷ, ㄹ ⑤ ㄴ, ㄹ, ㅂ

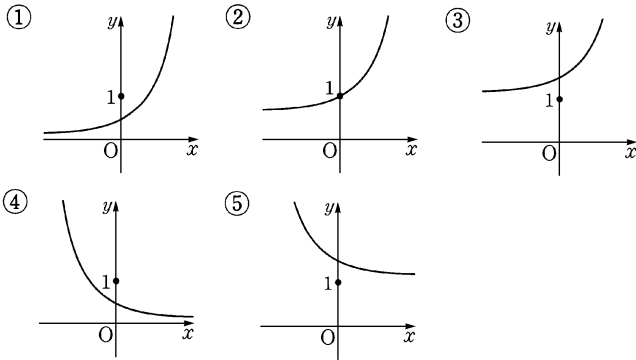
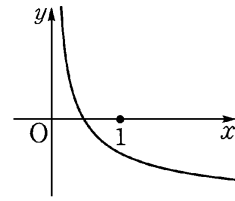
3. 함수 $f(x) = \log(x+1)$ 에 대하여 $f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{4}\right) + \dots + f\left(\frac{1}{19}\right)$ 의 값을 구하시오.

4. 오른쪽 그림은 함수 $f(x) = \log_a x$ 의 그래프이다.

이 때, $f\left(\frac{a}{18}\right)$ 의 값을 p, q 를 사용하여 나타내시오.



5. 함수 $y = \log_a bx$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때,
다음 중 함수 $y = ab^x$ 의 그래프로 적당한 것은?



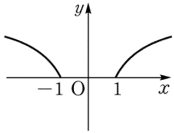
6. $y = 3 \cdot 2^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 α 만큼 평행이동하면 $y = 2^x$ 의 그래프와 겹쳐지고 $y = \log_3 2x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 β 만큼 평행이동하면 $y = \log_3 x$ 의 그래프와 겹쳐질 때, 두 상수 α, β 의 곱 $\alpha\beta$ 의 값을 구하시오.

7. 함수 $f(x) = a^x (a > 1)$ 에 대하여 함수 $y = f(x)$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동 시킨 그래프의 방정식을 $y = g(x)$ 라고 한다. 두 곡선 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 교점을 P, 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = 8$ 의 교점을 Q, 곡선 $y = g(x)$ 와 직선 $y = 8$ 의 교점을 R라 하자. $\triangle PQR$ 의 넓이가 28일 때, $g(-8)$ 의 값을 구하시오.

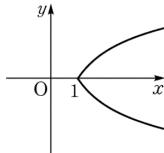
8. 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 그래프와 x 축의 방향으로 m 만큼 평행이동한 그래프가 직선 $x = 2$ 위의 한 점에서 만날 때, 상수 m 의 값을 구하시오.

9. 다음 중 $|y| = \log_2 x$ 의 그래프의 개형으로 옳은 것은?

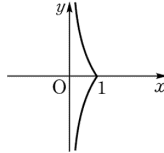
①



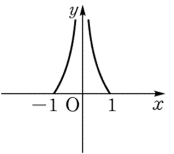
②



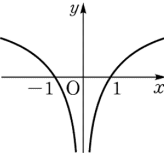
③



④



⑤



10. 다음 함수의 역함수를 구하시오.

(1) $y = 2^{x+1}$

(2) $y = 3^x + 2$

(3) $y = \log_4(x-1)$

(4) $y = \log_2(x-1) + 1$

11. 함수 $y = \frac{1}{2}(10^x - 10^{-x})$ 의 역함수를 구하시오.

12. 함수 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 의 역함수를 $f^{-1}(x)$ 라 할 때,
 $f^{-1}(n) + f^{-1}(-n)$ 의 값을 구하시오. (단, e 는 상수이다.)

3. 진수와 로그의 대소관계

$x > 0, y > 0, a > 0, a \neq 1$ 에 대하여

$$(1) x = y \iff \log_a x = \log_a y$$

$$(2) a > 1 \text{ 일 때 } x < y \iff \log_a x < \log_a y$$

$$(3) 0 < a < 1 \text{ 일 때 } x < y \iff \log_a x > \log_a y$$

4. 로그함수의 최대 · 최소 구하기

(1) $y = \log_a f(x)$ 꼴

$a > 1$ 일 때, 증가함수, $0 < a < 1$ 일 때 감소함수

$$\textcircled{1} a > 1 \text{ 인 경우 : } \begin{cases} f(x) \text{가 최대일 때} \Rightarrow y \text{가 최대} \\ f(x) \text{가 최소일 때} \Rightarrow y \text{가 최소} \end{cases}$$

$$\textcircled{2} 0 < a < 1 \text{ 인 경우 : } \begin{cases} f(x) \text{가 최소일 때} \Rightarrow y \text{가 최대} \\ f(x) \text{가 최대일 때} \Rightarrow y \text{가 최소} \end{cases}$$

(2) 산술평균, 기하평균의 관계 이용

(3) 치환꼴 $\Rightarrow$ 치환하면 변역!!!!

$\log_a x = X$ 로 치환하여 X 의 이차함수로 변형한 다음, 주어진 변역에서 최댓값 · 최솟값을 구한다.

13. 로그함수의 그래프를 활용하여 주어진 값들의 대소를 비교하시오.

(1) $\log_2 3, \log_2 10$

(2) $\log_3 \pi, \log_3 \frac{5}{2}, \log_3 \sqrt{2}$

(3) $\log_{\frac{1}{2}} 3, \log_{\frac{1}{4}} 5$

(4) $\log_{\frac{1}{3}} 2, \log_{\frac{1}{3}} 8, \log_{\frac{1}{3}} \pi$

14. $1 < x < 100$ 일 때, 다음 세 수 A, B, C 를 크기가 작은 것부터 차례로 나열하시오.

$$A = \log x^3, B = (\log x)^2, C = \log \frac{1}{x}$$

15. 다음 함수의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

(1) $y = \log(x^2 - 10x + 35)$

(2) $y = \log_{\frac{1}{2}}(-x^2 + 2x + 7) \quad (0 \leq x \leq 3)$

(3) $y = \log_3(x^2 - 2x + 6) \quad (-1 \leq x \leq 1)$

16. 함수 $y = \log_2(1-x) + \log_2 x$ 의 최댓값을 구하시오.

17. 함수 $y = 2\log_3 \sqrt{x} - \log_{\frac{1}{3}}(6-x)$ 의 최댓값을 구하시오.

18. 함수 $y = (\log_2 x)^2 - 2\log_2 x + 1$ 의 최솟값을 구하시오.

19. 함수 $y = \left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2 - \log_{\frac{1}{2}} x^2 + 3$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오. (단, $1 \leq x \leq 4$)

20. $x \geq 2, y \geq 2, xy = 16$ 일 때, $\log_2 x \cdot \log_2 y$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오.

21. $3 \leq x \leq 81$ 일 때, 함수 $y = x^{4 - \log_3 x}$ 의 최댓값과 최솟값의 차를 구하시오.

22. $x > 0, y > 0$ 일 때, $\log_3\left(2x + \frac{1}{y}\right) + \log_3\left(y + \frac{2}{x}\right)$ 의 최솟값을 구하시오.

23. $x > 1, y > 1$ 이고 $\log_3 x \cdot \log_3 y = 2$ 일 때, $\log_3 xy^2$ 의 최솟값을 구하시오.



5. 로그방정식

로그의 진수 또는 밑에 미지수를 포함한 방정식을 로그방정식이라고 한다.

6. 로그방정식의 해법

$$(1) \log_a f(x) = b \text{ 풀 } \Leftrightarrow f(x) = a^b$$

$$(2) \text{ 밑이 같을 때 : } \log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

$$(a \neq 1, a > 0 \text{이고 } f(x) > 0, g(x) > 0)$$

$$(3) \log_a x \text{ 를 포함할 때 } \Leftrightarrow \log_a x = X \text{로 치환한다.}$$

$$(4) \text{ 지수에 로그가 있을 때 } \Leftrightarrow \text{양변에 로그를 취한다.}$$

*로그방정식과 부등식을 풀 때에는 반드시 로그조건을 생각하여야 한다.

로그조건 $\Rightarrow$ 밑은 1이 아닌 양수, 진수는 양수

24. 다음 로그방정식을 푸시오.

$$(1) \log_2(x+5) - 5 = 0$$

$$(2) 2\log_4 3x = -1$$

$$(3) \log_{(2x-1)} 9 = 2$$

$$(4) \log_{x^2} 10 + 1 = 0$$

25. 다음 로그방정식을 푸시오.

$$(1) \log_3(2x+21) = \log_3 x + 2$$

$$(2) \log_2(x-4) = \log_4(x-1) + 1$$

26. 로그방정식 $\log_2(x^2+x+2) + 2\log_{\frac{1}{2}} x = 1$ 을 풀어라.



27. 방정식 $\log_{x-2} 4 = 2$ 을 만족하는 x 의 값을 구하시오.

28. 방정식 $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) = \log_{\frac{1}{2}}(3x+5)$ 를 만족하는 x 의 값을 구하시오.

29. 방정식 $\log_2(\log_3(\log_5 x)) = 0$ 을 만족하는 양수 x 의 값을 구하시오.

30. 방정식

$$\log_4(\log_3(\log_2 x)) = \log_9(\log_2(\log_4 y)) = \frac{1}{2}$$

을 만족하는 x, y 에 대하여 $xy = 2^n$ 이 성립한다. 이 때, 자연수 n 의 값을 구하시오.

31. 다음 로그방정식을 푸시오.

(1) $(\log_5 x)^2 = 3 + \log_5 x^2$

(2) $\log_3 x - \log_x 81 = 3$

(3) $\log x^{\log x} - \log x^6 + 9 = 0$

32. 방정식 $\log_4(x-2) + \log_{\frac{1}{4}}(x-5) = \frac{1}{2}$ 을 만족하는 x 의 값을 구하시오.

33. 방정식 $\log_3(x+3) - \log_9(x+7) = 1$ 의 근을 구하시오.

34. $x > 1$ 이고, $(\log_3 x)^4 - 3(\log_3 x)^2 + 1 = 0$ 일 때, $\log_3 x + \frac{1}{\log_3 x}$ 의 값을 구하시오.

35. 방정식 $(\log_2 x)^2 - 3\log_2 x + 2 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha\beta$ 의 값을 구하시오.

36. 방정식 $(\log_2 x)^2 - 4\log_2 x = 0$ 의 두 근을 각각 α, β 라 할 때, $\alpha + \beta$ 의 값을 구하시오.

37. 방정식 $2^{\log_8 x} = 3$ 을 만족하는 x 의 값을 구하시오.

38. 방정식 $x^{\log x} = 10$ 을 만족하는 모든 실수 x 의 곱을 구하시오.

39. $x > 0$ 일 때, 방정식 $(2x)^{\log 2} = (3x)^{\log 3}$ 을 만족하는 x 의 값을 구하시오.

40. 연립방정식
$$\begin{cases} \log(x+y)=1 \\ \log_3 x + \log_3 y = 2 \end{cases}$$
를 만족하는 x, y 의 순서쌍 (x, y) 가 $(a, b), (c, d)$ 일 때,
 $a+b+c+d$ 의 값을 구하시오.

41. 연립방정식
$$\begin{cases} \log_2 xy = 1 \\ 2^x \cdot 2^y = 8 \end{cases}$$
을 만족하는 실수 x, y 를 구하시오.(단, $x > y$)

7. 로그부등식

진수 또는 밑에 미지수를 포함한 부등식을 로그부등식이라고 한다.

로그부등식의 해법은 로그방정식의 해법과 같으나, 밑과 진수의 대소 관계에 유의한다.

8. 로그부등식의 해법

(1) 로그에 대하여 일차식인 경우의 해법

$$\log_a f(x) < \log_a g(x)$$

진수 : $f(x) > 0, g(x) > 0$, 밑 : $a > 0, a \neq 1$

..... ㉠

이 때 구하는 범위는

① $a > 1$ 일 때 $f(x) < g(x)$ 와 ㉠의 공통범위가 구하는 범위이다.

② $0 < a < 1$ 일 때 $f(x) > g(x)$ 와 ㉠의 공통범위가 구하는 범위이다.

(2) 로그에 대하여 일차식이 아닌 경우의 해법

$\log_a f(x) = t$ 로 치환하여 t 에 관한 부등식을 만들어 풀 다음, 위의 ①, ②의 해법을 적용하여 x 의 범위를 구한다.

(3) 지수에 로그가 있을 때

양변에 로그를 취한다.

* 로그부등식도 로그방정식과 같이 로그조건을 꼭 음미하여야 한다.(밑수조심!!! 진수조건조심!!!!)

42. 다음 로그부등식을 푸시오.

(1) $\log_2(x+2) < 1$

(2) $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) > 3$

(3) $2 < \log_3(2x+1) < 3$

(4) $-1 < \log_{0.1}(3-x) < 0$

43. 부등식 $\log_2\left(\log_{\frac{1}{3}}x\right) < 1$ 의 해를 구하시오.

44. 다음 로그부등식을 푸시오.

(1) $\log_5 x + \log_5 (x-4) < 1$

(2) $\log_{\frac{1}{3}} (x-2) < 2\log_{\frac{1}{3}} (x-4)$

45. 다음 로그부등식을 푸시오.

(1) $(\log x)^2 - \log x^5 > 6$

(2) $(\log_{0.2} x)^2 - 3\log_{0.2} x + 2 < 0$

46. $x > 1$ 일 때, 부등식 $\log x + \log_x 10 < \frac{5}{2}$ 를 만족하는 정수 x 의 최댓값과 최솟값의 차를 구하시오.

47. 부등식 $x^{\log_2 x} \leq 8x^2$ 의 해를 구하시오.

48. 부등식 $x^{\log_3 x} < ax$ 의 해가 $\frac{1}{3} < x < 9$ 일 때, 양수 a 의 값을 구하시오.

49. 부등식 $x^{\log ax} > 100x$ 의 해가 $0 < x < \frac{1}{10}$ 또는 $x > \beta$ 일 때, $a - \beta$ 의 값을

구하시오. (단, $a > 0, \beta > \frac{1}{10}$)

50. 정부의 국가간 무역 개방 정책에 의하여 벼를 재배하는 농가의 수가 매년 5%씩 감소한다고 한다. 이와 같은 감소 추세가 계속된다면 벼를 재배하는 농가의 수가 현재의 70%이하가 되는 것은 최소 몇 년 후부터인지 구하시오. (단, $\log 7 = 0.8451, \log 9.5 = 0.9777$)

51. 별의 밝기를 등급으로 나타내는데 가장 밝은 별을 1등성이라 하고, 가장 어두운 별을 6등성이라 한다. 별의 밝기가 6등성의 x 배 되는 별의 등급을 n 이라 하면 $n = 6 - \frac{5}{2} \log x$ 의 관계가 성립한다고 할 때, 2등성인 별의 밝기는 6등성인 별의 밝기의 $k \cdot 10^{-0.4}$ 배가 되는 상수 k 의 값을 구하시오.

52. 들어오는 빛의 양의 10%를 반사시키는 특수한 필름이 있다. 이 필름을 유리에 붙여서 유리를 통과한 빛의 양이 처음의 $\frac{1}{4}$ 이하가 되도록 하려면 이 필름을 최소한 몇 장 붙여야 하는지를 구하시오. (단, $\log 2 = 0.3010, \log 3 = 0.4771$)

정답 및 풀이

1) 정답 1

$\log_{0.25} a = -4$, $\log_{0.25} b = 8$ 이므로

$$f(4\sqrt{ab}) = \log_{0.25} 4\sqrt{ab}$$

$$= \log_{0.25} 4 + \frac{1}{2} \log_{0.25} ab$$

$$= -\log_4 4 + \frac{1}{2} (\log_{0.25} a + \log_{0.25} b)$$

$$= -1 + \frac{1}{2} (-4 + 8)$$

$$= 1$$

2) 정답 ⑤

ㄱ. 정의역은 양의실수 전체의 집합이지만 치역은 실수 전체의 집합이다.. (거짓)

ㄴ. $0 < a < 1$ 일 때 x 의 값이 증가하면 $f(x)$ 의 값은 감소하므로 $u < v$ 이면 $f(u) > f(v)$ 이다. (참)

ㄷ. 점 $(1, 0)$ 을 지나고 점근선은 y 축이다. (거짓)

ㄹ. $f(xy) = \log_a xy + \log_a y = f(x) + f(y)$ (참)

ㅁ. $f(x+y) = \log_a (x+y)$

$$f(x)f(y) = \log_a x \cdot \log_a y$$

$\therefore f(x+y) \neq f(x)f(y)$ (거짓)

ㄷ. $y = \log_a x$ 는 $y = a^x$ 의 역함수이므로 두 함수 $y = \log_a x$ 와 $y = a^x$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다. (참) 따라서, 옳은 것은 ㄴ, ㄹ, ㄷ이다.

3) 정답 1

$$f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{4}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{19}\right)$$

$$= \log\left(\frac{1}{2} + 1\right) + \log\left(\frac{1}{3} + 1\right) + \log\left(\frac{1}{4} + 1\right) + \cdots + \log\left(\frac{1}{19} + 1\right)$$

$$= \log\frac{3}{2} + \log\frac{4}{3} + \log\frac{5}{4} + \cdots + \log\left(\frac{1}{19} + 1\right)$$

$$= \log\left(\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \cdots \frac{20}{19}\right)$$

$$= \log\frac{20}{2} = \log 10 = 1$$

4) 정답 $1 - p - 2q$

$f(x) = \log_a x$ 의 그래프가 점 $(2, p)$, $(3, q)$ 를 지나므로

$$\log_a 2 = p, \log_a 3 = q$$

$$\therefore f\left(\frac{a}{18}\right) = \log_a \frac{a}{18} = \log_a a - \log_a 18$$

$$= 1 - \log_a (2 \cdot 3^2) = 1 - (\log_a 2 + \log_a 3^2)$$

$$= 1 - \log_a 2 - 2\log_a 3$$

$$= 1 - p - 2q$$

5) 정답 ①

주어진 그래프에서 $y = \log_a bx$ 의 정의역이 $\{x | x > 0\}$ 이므로 $b > 0$ 이고, x 의 값이 증가할 때, y 의 값은 감소하므로

$0 < a < 1$ 이다. 또 $y = \log_a bx = \log_a x + \log_a b$ 이므로 $y = \log_a bx$ 의 그래프는

$y = \log_a x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 $\log_a b$ 만큼 평행이동한 것이다. 이 때, $\log_a b < 0$ 이므로 $b > 1$ 이다. 한편, $y = ab^x$ 에서

$0 < a < 1, b > 1$ 이므로 x 의 값이 증가할 때, y 의 값도 증가하므로 그 그래프는 점 $(0, a)$ 를 지난다.

따라서 함수 $y = ab^x$ 의 그래프로 가장 적당한 것은 ①이다.

참고 함수 $y = ab^x = b^{\log_b a} b^x = b^{x + \log_b a}$ 의 그래프는 $y = b^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\log_b a$ 만큼 평행이동한 것이다.
이 때, $b > 1$ 이고 $-\log_b a > 0$ 이다.

6) 정답 -1

$y = 3 \cdot 2^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 α 만큼 평행이동하면 $y = 3 \cdot 2^{x-\alpha}$

$$3 \cdot 2^{x-\alpha} = 2^x$$

$$3 \cdot 2^{-\alpha} = 1$$

$$2^{-\alpha} = \frac{1}{3}$$

$$-\alpha = \log_2 \frac{1}{3}$$

$$\alpha = \log_2 3 \cdots \textcircled{1}$$

$y = \log_3 2x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 β 만큼 평행이동하면

$$y - \beta = \log_3 2x$$

$$y = \log_3 2x + \beta$$

$$\log_3 2x + \beta = \log_3 x$$

$$\log_3 2 + \log_3 x + \beta = \log_3 x$$

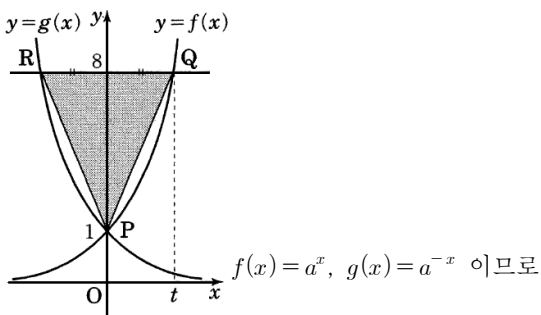
$$\beta = -\log_3 2 \cdots \textcircled{2}$$

①, ②에서

$$\alpha\beta = \log_2 3 \cdot (-\log_3 2) = -1$$

7) 정답 64

<풀이>



$y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프는 그림과

같다. 이 때, 점 P의 좌표가 $P(0, 1)$

이므로 점 Q의 x 좌표를 $t(t > 0)$ 라 하면

$$\triangle PQR = \frac{1}{2} \times 2t \times 7 = 28$$

$$\therefore t = 4 \quad \therefore a^4 = 8$$

$$g(-8) = a^8 = (a^4)^2 = 64$$

8) 정답 $\frac{3}{2}$

$y = \log_2 x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 그래프는

$$y = -\log_2 x \cdots \textcircled{1}$$

$y = \log_2 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼 평행이동한 그래프는

$$y = \log_2(x - m) \cdots \textcircled{2}$$

㉠, ㉡을 연립하면

$$-\log_2 x = \log_2 (x - m)$$

$$\frac{1}{x} = x - m$$

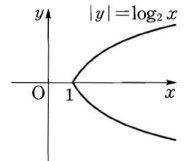
직선 $x = 2$ 위의 한 점에서 만나므로 $x = 2$ 를 대입하면

$$\frac{1}{2} = 2 - m$$

$$\therefore m = \frac{3}{2}$$

9) 정답 ㉡

$|y| = \log_2 x$ 의 그래프는 $y = \log_2 x (y \geq 0)$ 의 그래프와 이 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 그래프이므로 오른쪽 그림과 같다.



10) 정답(1) $y = \log_2 x - 1$ (2) $y = \log_3 (x - 2)$ (3) $y = 4^x + 1$ (4) $y = 2^{x-1} + 1$

(1) $y = 2^{x+1}$ 에서 $x + 1 = \log_2 y$

$$\therefore x = \log_2 y - 1$$

x 와 y 를 바꾸면 구하는 역함수는

$$y = \log_2 x - 1$$

(2) $y = 3^x + 2$ 에서 $3^x = y - 2$

$$\therefore x = \log_3 (y - 2)$$

x 와 y 를 바꾸면 구하는 역함수는

$$y = \log_3 (x - 2)$$

(3) $y = \log_4 (x - 1)$ 에서 $x - 1 = 4^y$

$$\therefore x = 4^y + 1$$

x 와 y 를 바꾸면 구하는 역함수는

$$y = 4^x + 1$$

(4) $y = \log_2 (x - 1) + 1$ 에서 $\log_2 (x - 1) = y - 1$

$$x - 1 = 2^{y-1} \quad \therefore x = 2^{y-1} + 1$$

x 와 y 를 바꾸면 구하는 역함수는

$$y = 2^{x-1} + 1$$

11) 정답 $y = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$

$$y = \frac{1}{2}(\log 10^x - \log 10^{-x})$$

$$2y = \log 10^x - \log 10^{-x}$$

이 때, $10^x = t (t > 0)$ 로 놓으면

$$2y = \log t - \log \frac{1}{t}, t^2 - 2yt - 1 = 0$$

$$\therefore t = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$$

그런데, $t > 0$ 이므로 $t = y + \sqrt{y^2 + 1}$

$$\text{따라서, } 10^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$$

따라서, $10^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$ 이므로

$$x = \log(y + \sqrt{y^2 + 1})$$

지수함수 로그함수

x 와 y 를 바꾸면 구하는 역함수는 $y = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$

12) 정답 0

$f^{-1}(n) = a$ 라 하면

$$f(a) = \frac{e^a - e^{-a}}{2} = n$$

이 때, $f(-a) = \frac{e^{-a} - e^a}{2} = -\frac{e^a - e^{-a}}{2} = -n$ 이므로

$$f^{-1}(-n) = -a$$

$$\therefore f^{-1}(n) + f^{-1}(-n) = a + (-a) = 0$$

13) 정답 풀이참조

(1) $y = \log_2 x$ 의 그래프는

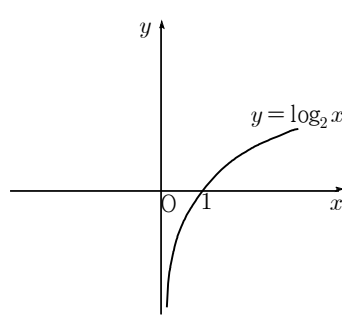
$$\log_2 3 < \log_2 10$$

$$\sqrt{2} < \frac{5}{2} < \pi \text{이므로}$$

$y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 의 그래프는 오른쪽

$$\log_{\frac{1}{2}} 3 < \log_{\frac{1}{2}} 5$$

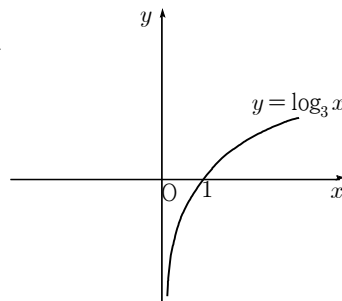
$$\log_{\frac{1}{3}} 8 < \log_{\frac{1}{3}} \pi < \log_{\frac{1}{3}} 2$$



오른쪽 그림과 같고 $3 < 10$ 이므로

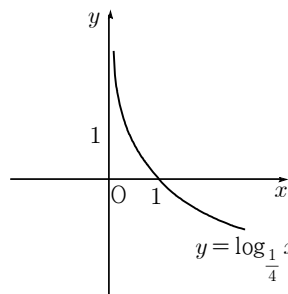
(2) $y = \log_3 x$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고

$$\log_3 \sqrt{2} < \log_3 \frac{5}{2} < \log_3 \pi$$

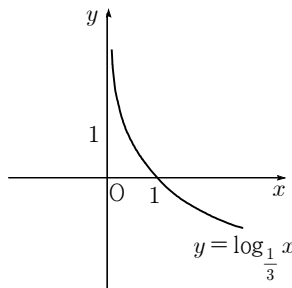


$$(3) y = \log_{\frac{1}{4}} 5 = \log_{\left(\frac{1}{2}\right)^2} 5 = \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{5}$$

그림과 같고 $\sqrt{5} < 3$ 이므로



(4) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 $2 < \pi < 8$ 이므로



14) 정답 C, B, A

$1 < x < 100$ 일 때, $0 < \log x < 2$ 이므로

$$A - B = \log x^2 - (\log x)^2$$

$$= 2\log x - (\log x)^2$$

$$= \log x(2 - \log x) > 0$$

$$\therefore A > B \cdots \textcircled{㉠}$$

$$B - C = (\log x)^2 - \log \frac{1}{x}$$

$$= (\log x)^2 + \log x$$

$$= \log x(\log x + 1) > 0$$

$$\therefore B > C \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 에 의하여 $C < B < A$

15) 정답

(1) 최댓값 : 없다. 최솟값 : 1

(2) 최댓값 : -2, 최솟값 : -3

(3) 최댓값 : 2, 최솟값 : $\log_3 5$

(1) $y = \log(x^2 - 10x + 35)$ 에서 밑이 1보다 크므로

$x^2 - 10x + 35$ 가 최소일 때 y 도 최소이다.

$$f(x) = x^2 - 10x + 35 \text{로 놓으면}$$

$$f(x) = (x - 5)^2 + 10$$

이므로 $f(x)$ 의 최솟값은 10이다.

따라서, 주어진 함수의 최솟값은 $\log 10 = 1$ 이고 최댓값은 없다.

(2) $y = \log_{\frac{1}{2}}(-x^2 + 2x + 7)$ 에서 $0 < (\text{밑}) < 1$ 이므로

$-x^2 + 2x + 7$ 이 최대일 때 y 는 최소이다.

$$f(x) = -x^2 + 2x + 7 \text{로 놓으면}$$

$$f(x) = -(x - 1)^2 + 8$$

이므로 $0 \leq x \leq 3$ 에서 $f(x)$ 는 $x = 1$ 일 때 최댓값 8을 가지고 $x = 3$ 일 때 최솟값 4를 가진다.

따라서, 주어진 함수의 최솟값은

$$\log_{\frac{1}{2}} 4 = \log_{2^{-1}} 2^2 = -2$$

이고 최댓값은

$$\log_{\frac{1}{2}} 8 = \log_{2^{-1}} 2^3 = -3$$

(3) $y = \log_3(x^2 - 2x + 6)$ 은 밑이 1보다 크므로

$x^2 - 2x + 6$ 이 최대일 때 y 도 최대이다.

$$f(x) = x^2 - 2x + 6 \text{으로 놓으면}$$

$$f(x) = (x - 1)^2 + 5$$

이므로 $-1 \leq x \leq 1$ 에서 $f(x)$ 는 $x = -1$ 일 때 최댓값 9를 가지고 $x = 1$ 일 때 최솟값 5를 가진다.

따라서, 주어진 함수의 최댓값은

$$\log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$$

이고 최솟값은 $\log_3 5$ 이다.

16) 정답 -2

진수 조건에서 $1 - x > 0, x > 0 \therefore 0 < x < 1$

$$y = \log_2(1 - x) + \log_2 x$$

$$= \log_2(1 - x)x = \log_2(x - x^2)$$

밑이 1보다 크므로 $x - x^2$ 이 최대일 때, y 는 최댓값을 갖는다.

$f(x) = x - x^2$ 이라 하면

$f(x) = x - x^2 = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$ 에서 $x = \frac{1}{2}$ 일 때, 최댓값 $\frac{1}{4}$ 을 갖는다.

따라서, $x = \frac{1}{2}$ 일 때, 최댓값은 $\log_2 \frac{1}{4} = \log_2 2^{-2} = -2$

17) 정답 2

진수 조건에서

$$\sqrt{x} > 0, 6 - x > 0 \quad \therefore 0 < x < 6$$

$$2\log_3 \sqrt{x} = \log_3 x, \log_{\frac{1}{3}}(6 - x)$$

$$y = 2\log_3 \sqrt{x} - \log_{\frac{1}{3}}(6 - x)$$

$$= \log_3 x + \log_3(6 - x)$$

$$= \log_3 x(6 - x) = \log_3(6x - x^2)$$

밑은 1보다 크므로 $6x - x^2$ 이 최대일 때, y 는 최댓값을 갖는다.

$f(x) = 6x - x^2$ 이라 하면

$f(x) = 6x - x^2$ 이라 하면

$f(x) = 6x - x^2 = -(x - 3)^2 + 9$ 에서 $x = 3$ 일 때, 최댓값 9를 갖는다.

따라서, $x = 3$ 일 때, 최댓값은 $\log_3 9 = 2$

18) 정답 0

$\log_2 x = X$ 로 놓으면 주어진 함수는 $y = X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$

따라서, $X = 1$ 일 때 최솟값은 0이다.

19) 정답 14

$$\begin{aligned} y &= \left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2 - \log_{\frac{1}{2}} x^2 + 3 \\ &= \left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2 - 2\log_{\frac{1}{2}} x + 3 \end{aligned}$$

에서 $\log_{\frac{1}{2}} x = t$ 로 치환하면

$$y = t^2 - 2t + 3 = (t - 1)^2 + 2$$

그런데, 밑이 1보다 작으므로

$1 \leq x \leq 4$ 일 때,

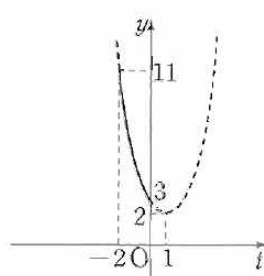
$$\log_{\frac{1}{2}} 1 \geq \log_{\frac{1}{2}} x \geq \log_{\frac{1}{2}} 4$$

$$\therefore -2 \leq t \leq 0$$

따라서, $t = -2$ 일 때, 최댓값은 11

$t = 0$ 일 때, 최솟값은 3

따라서, 최댓값과 최솟값의 합은 14이다.



20) 정답 7

$\log_2 x = X, \log_2 y = Y$ 로 놓으면 $x \geq 2, y \geq 2$ 에서 $X \geq 1, Y \geq 1 \dots \textcircled{1}$

$xy = 16$ 의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$$\log_2 xy = \log_2 16, \log_2 x + \log_2 y = 4$$

$$X + Y = 4 \therefore Y = 4 - X$$

$\textcircled{1}$ 에서 $4 - X \geq 1$

$$\therefore X \leq 3 \dots \textcircled{D}$$

㉠, ㉡에서 $1 \leq X \leq 3$

$$\therefore \log_2 x \cdot \log_2 y = XY = X(4-X)$$

$$= -X^2 + 4X$$

$$= -(X-2)^2 + 4$$

따라서, $X=2$ 일 때 최댓값은 4, $X=1$ 일 때 최솟값은 3이므로 최댓값과 최솟값의 합은 7

21) 정답 80

$y = x^{4-\log_3 x}$ 의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$$\log_3 y = \log_3 x^{4-\log_3 x} = (4-\log_3 x)\log_3 x$$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면 $3 \leq x \leq 81$ 에서 $1 \leq t \leq 4$ 이고

$$f(t) = (4-t)t = t^2 + 4t = -(t-2)^2 + 4$$

따라서, $t=2$ 일 때 최댓값 4, $t=4$ 일 때 최솟값 0을 갖는다.

그런데 $f(t) = \log_3 y$ 이므로

$$\log_3 y = 4 \text{에서 } y = 81, \log_3 y = 0 \text{에서 } y = 1$$

따라서 최댓값은 81, 최솟값은 1이므로 최댓값과 최솟값의 차는 $81-1=80$

22) 정답 2

$$\begin{aligned} \log_3 \left(2x + \frac{1}{y}\right) + \log_3 \left(y + \frac{2}{x}\right) &= \log_3 \left(2x + \frac{1}{y}\right) \left(y + \frac{2}{x}\right) \\ &= \log_3 \left(2xy + \frac{2}{xy} + 5\right) \end{aligned}$$

이 때, $x > 0, y > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여 $2xy + \frac{2}{xy} \geq 2\sqrt{2xy \cdot \frac{2}{xy}} = 4$ (단, 등호는 $xy=1$ 일 때 성립)

따라서, 구하는 최솟값은 $\log_3(4+5) = \log_3 9 = 2$

23) 정답 4

$x > 1, y > 1$ 이므로 $\log_3 x > 0, \log_3 y > 0$

$$\log_3 xy^2 = \log_3 x + 2\log_3 y$$

한편, 산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$$\log_3 x + 2\log_3 y \geq 2\sqrt{\log_3 x \cdot 2\log_3 y} = 4$$

(단, 등호는 $\log_3 x = 2\log_3 y$ 일 때 성립)

따라서, $\log_3 x = 2\log_3 y$ 일 때 최솟값 4를 갖는다.

$$24) \text{ 정답 (1) } x=27 \text{ (2) } x=\frac{1}{6} \text{ (3) } x=2 \text{ (4) } x=\pm\frac{\sqrt{10}}{10}$$

(1) $\log_2(x+5)=5$ 에서

$$x+5=2^5 \quad \therefore x=32-5=27$$

진수는 양수이어야 하므로

$$x+5>0 \quad \therefore x>-5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x=27$ 은 ㉠을 만족하므로 구하는 해이다.

(2) $2\log_4 3x = -1$ 에서

$$2\log_2 3x = -1, \log_2 3x = -\frac{1}{2}$$

$$3x = \frac{1}{2} \quad \therefore x = \frac{1}{6}$$

진수는 양수이어야 하므로

$$3x > 0 \quad \therefore x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x = \frac{1}{6}$ 은 ㉠을 만족하므로 구하는 해이다.

(3) $\log_{2x-1} 9 = 2$ 에서

$$(2x-1)^2 = 9$$

$$2x-1 = 3 \text{ 또는 } 2x-1 = -3$$

$$\therefore x = 2 \text{ 또는 } x = -1$$

로그의 밑의 조건에서

$$2x-1 > 0, 2x-1 \neq 1$$

$$\therefore x > \frac{1}{2}, x \neq 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

㉠에 의하여 $x = 2$

(4) $\log_{x^2} 10 = -1$ 에서

$$(x^2)^{-1} = 10, x^2 = \frac{1}{10} \quad \therefore x = \pm \frac{\sqrt{10}}{10}$$

로그의 밑의 조건에서

$$x^2 > 0, x^2 \neq \pm 1$$

$$\therefore x \neq 0, x \neq \pm 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x = \pm \frac{\sqrt{10}}{10}$ 은 ㉠을 만족하므로 구하는 해이다.

25) 정답 (1) $x = 3$ (2) $x = 10$

(1) $\log_3 (2x+21) = \log_3 x + 2$ 에서

$$\log_3 (2x+21) = \log_3 x + \log_3 9$$

$$\log_3 (2x+21) = \log_3 9x$$

$$2x+21 = 9x, 7x = 21$$

$$\therefore x = 3$$

진수는 양수이어야 하므로

$$2x+21 > 0, x > 0$$

$$\therefore x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x = 3$ 은 ㉠을 만족하므로 구하는 해이다.

(2) $\log_2 (x-4) = \log_4 (x-1) + 1$ 에서

$$\log_4 (x-4)^2 = \log_4 (x-1) + \log_4 4$$

$$\log_4 (x-4)^2 = \log_4 4(x-1)$$

$$(x-4)^2 = 4(x-1), x^2 - 12x + 20 = 0$$

$$(x-2)(x-10) = 0$$

$$\therefore x = 2 \text{ 또는 } x = 10$$

진수는 양수이어야 하므로

$$x > 4, x > 1$$

$$\therefore x > 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

㉠에 의하여 $x = 10$

26) 정답 $x = 2$

로그의 진수 조건에서

$$x^2 + x + 2 > 0, (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4} > 0 \quad \therefore x \text{는 모든 실수} \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{또, } x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{과 } \textcircled{2} \text{에서 } x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

주어진 로그방정식에서

$$\log_2(x^2 + x + 2) - \log_2 x^2 = 1,$$

$$\log_2(x^2 + x + 2) = \log_2 x^2 + \log_2 2$$

$$\log_2(x^2 + x + 2) = \log_2 2x^2 \quad \therefore x^2 + x + 2 = 2x^2$$

$$\text{이것을 풀면 } x^2 - x - 2 = 0, (x+1)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = 2 (\because \ominus)$$

27) 정답 4

밑의 조건에서 $x-2 > 0, x-2 \neq 1$

$$\therefore x > 2, x \neq 3 \quad \dots\dots \ominus$$

$$\log_{x-2} 4 = 2 \text{에서 } (x-2)^2 = 4, x^2 - 4x = 0$$

$$\therefore x = 4 (\because \omin�)$$

28) 정답 해가 없다.

진수의 조건에서 $x+1 > 0, 3x+5 > 0$

$$\therefore x > -1 \quad \dots\dots \omin�$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+1) = \log_{\frac{1}{2}}(3x+5) \text{에서}$$

$$x+1 = 3x+5, 2x = -4 \quad \therefore x = -2$$

따라서, $\omin�$ 에 의해 방정식을 만족하는 해가 없다.

29) 정답 125

$$\log_2(\log_3(\log_5 x)) = 0 \text{에서}$$

$$\log_2(\log_5 x) = 1, \log_5 x = 3$$

$$\therefore x = 5^3 = 125$$

30) 정답 25

$$\log_4(\log_3(\log_2 x)) = \frac{1}{2} \text{에서 } \log_3(\log_2 x) = 4^{\frac{1}{2}} = 2$$

$$\log_2 x = 3^2 = 9 \quad \therefore x = 2^9$$

$$\log_9(\log_2(\log_4 y)) = \frac{1}{2} \text{에서 } \log_2(\log_4 y) = 9^{\frac{1}{2}} = 3$$

$$\log_4 y = 2^3 = 8 \quad \therefore y = 4^8 = 2^{16}$$

$$\therefore xy = 2^{9+16} = 2^{25} \text{이므로 } n = 25$$

$$31) \text{ 정답 (1) } x = \frac{1}{5} \text{ 또는 } x = 125 \quad (2) \quad x = \frac{1}{3} \text{ 또는 } x = 81$$

$$(3) \quad x = 1000$$

$$(1) \quad (\log_5 x)^2 = 3 + \log_5 x^2 \text{에서}$$

$$(\log_5 x)^2 = 3 + 2 \log_5 x$$

$$\log_5 x = t \text{로 놓으면}$$

$$t^2 = 3 + 2t, t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$(t+1)(t-3) = 0$$

$$\therefore t = -1 \text{ 또는 } t = 3$$

$$\text{따라서, } \log_5 x = -1 \text{ 또는 } \log_5 x = 3 \text{이므로}$$

$$x = \frac{1}{5} \text{ 또는 } x = 5^3 = 125$$

(2) $\log_3 x - \log_x 81 = 3$ 에서

$$\log_3 x - \log_x 3^4 = 3$$

$$\log_3 x - \frac{4}{\log_3 x} = 3$$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면

$$t - \frac{4}{t} = 3, \quad t^2 - 3t - 4 = 0$$

$$(t+1)(t-4) = 0$$

$$\therefore t = -1 \text{ 또는 } t = 4$$

따라서, $\log_3 x = -1$ 또는 $\log_3 x = 4$ 이므로

$$x = 3^{-1} = \frac{1}{3} \text{ 또는 } x = 3^4 = 81$$

(3) $\log x^{\log x} - \log x^6 + 9 = 0$ 에서

$$(\log x)^2 - 6 \log x + 9 = 0$$

$\log x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 6t + 9 = 0, \quad (t-3)^2 = 0$$

$$\therefore t = 3$$

따라서, $\log x = 3$ 이므로

$$x = 1000$$

32) 정답 8

진수의 조건에서 $x-2 > 0, x-5 > 0 \quad \therefore x > 5$

$$\log_4(x-2) + \log_{\frac{1}{4}}(x-5) = \frac{1}{2} \text{에서}$$

$$\log_4(x-2) - \log_4(x-5) = \log_4 4^{\frac{1}{2}}$$

$$\log_4(x-2) = \log_4(x-5) + \log_4 2$$

$$\log_4(x-2) = \log_4 2(x-5)$$

$$x-2 = 2x-10 \quad \therefore x = 8$$

33) 정답 9

진수의 조건에서 $x+3 > 0, x+7 > 0$

$$\therefore x > -3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\log_3(x+3) - \log_9(x+7) = 1$ 에서

$$\log_{3^2}(x+3)^2 = \log_9(x+7) + \log_9 9$$

$$\log_9(x+3)^2 = \log_9 9(x+7)$$

$$(x+3)^2 = 9x+63, \quad x^2-3x-54=0$$

$$(x+6)(x-9)=0 \quad \therefore x=9 \quad (\because \textcircled{1})$$

34) 정답 $\sqrt{5}$

$(\log_3 x)^4 - 3(\log_3 x)^2 + 1 = 0$ 에서 $\log_3 x = t$ 로 놓으면 $x > 1$ 에서 $t > 0$ 이고, $t^4 - 3t^2 + 1 = 0$

양변을 t^2 으로 나누면

$$t^2 - 3 + \frac{1}{t^2} = 0, \quad \left(t + \frac{1}{t}\right)^2 = 5$$

$$\therefore t + \frac{1}{t} = \pm \sqrt{5}$$

그런데 $t > 0$ 이므로 $t + \frac{1}{t} = \sqrt{5}$

$$\therefore \log_3 x + \frac{1}{\log_3 x} = \sqrt{5}$$

35) 정답 8

$(\log_2 x)^2 - 3\log_2 x + 2 = 0$ 에서

$\log_2 x = t$ 라 하면 $t^2 - 3t + 2 = 0$

$(t-1)(t-2)=0 \quad \therefore t=1 \text{ 또는 } t=2$

$t=1$ 일 때, $x=2^1=2$

$t=2$ 일 때, $x=2^2=4$

따라서, $\alpha \cdot \beta = 2 \times 4 = 8$

36) 정답 17

$(\log_2 x)^2 - 4\log_2 x = 0$ 에서

$\log_2 x = t$ 라 하면 $t^2 - 4t = 0, t(t-4)=0$

$\therefore t=0 \text{ 또는 } t=4$

$t=0$ 일 때, $x=1$

$t=4$ 일 때, $x=2^4=16$

$\therefore \alpha + \beta = 1 + 16 = 17$

37) 정답 27

$2^{\log_8 x} = 3$ 에서 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 2^{\log_8 x} = \log_2 3, \log_8 x \cdot \log_2 2 = \log_2 3$

$\log_8 x = \log_2 3 = \log_{2^3} 3^3 = \log_8 27$

$\therefore x = 27$

38) 정답 1

$x^{\log x} = 10$ 의 양변에 상용로그를 취하면

$\log x^{\log x} = \log 10, (\log x)^2 = 1$

$\log = \pm 1 \quad \therefore x = 10 \text{ 또는 } x = 10^{-1} = \frac{1}{10}$

따라서, 모든 실수 x 의 곱은 $10 \cdot \frac{1}{10} = 1$

39) 정답 $\frac{1}{6}$

$(2x)^{\log 2} = (3x)^{\log 3}$ 의 양변에 상용로그를 취하면

$\log (2x)^{\log 2} = \log (3x)^{\log 3}$

$\log 2 \cdot \log 2x = \log 3 \cdot \log 3x$

$\log 2 \cdot (\log 2 + \log x) = \log 3 \cdot (\log 3 + \log x)$

$(\log 2 - \log 3)\log x = (\log 3)^2 - (\log 2)^2$
 $= (\log 3 - \log 2)(\log 3 + \log 2)$

$\therefore \log x = -(\log 3 + \log 2) = -\log 6 = \log \frac{1}{6}$

$\therefore x = \frac{1}{6}$

40) 정답 20

$$\log(x+y)=1 \text{에서 } x+y=10 \quad \dots \textcircled{㉠}$$

$$\log_3 x + \log_3 y = 2 \text{에서}$$

$$\log_3 xy = 2 \quad \therefore xy = 3^2 = 9 \quad \dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$x=1, y=9 \text{ 또는 } x=9, y=1$$

따라서, 순서쌍이 (1, 9), (9, 1) 이므로

$$a+b+c+d=1+9+9+1=20$$

41) 정답 $x=2, y=1$

$$\log_2 xy = 1 \text{에서 } xy = 2 \quad \dots \textcircled{㉠}$$

$$2^x \cdot 2^y = 8 \text{에서 } 2^{x+y} = 2^3 \therefore x+y=3 \quad \dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에서 $x > y$ 이므로 $x=2, y=1$

42) 정답 (1) $-2 < x < 0$

$$(2) 1 < x < \frac{9}{8}$$

$$(3) 4 < x < 13$$

$$(4) -7 < x < 2$$

(1) 진수는 양수이어야 하므로

$$x+2 > 0 \quad \therefore x > -2 \quad \dots \textcircled{㉠}$$

$$\log_2(x+2) < 1 \text{에서 } \log_2(x+2) < \log_2 2$$

밑이 1 보다 크므로

$$x+2 < 2 \quad \therefore x < 0 \quad \dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에 의하여 $-2 < x < 0$

(2) 진수는 양수이어야 하므로

$$x-1 > 0 \quad \therefore x > 1 \quad \dots \textcircled{㉠}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-1) > 3 \text{에서 } \log_{\frac{1}{2}}(x-1) > \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}$$

$0 < (밑) < 1$ 이므로

$$x-1 < \frac{1}{8} \quad \therefore x < \frac{9}{8} \quad \dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에 의하여 $1 < x < \frac{9}{8}$

(3) 진수는 양수이어야 하므로

$$2x+1 > 0 \quad \therefore x > -\frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{㉠}$$

$$2 < \log_3(2x+1) < 3 \text{에서 } \log_3 9 < \log_3(2x+1) < \log_3 27$$

밑이 1 보다 크므로

$$9 < 2x+1 < 27, 8 < 2x < 26 \quad \therefore 4 < x < 13 \quad \dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에 의하여 $4 < x < 13$

(4) 진수는 양수이어야 하므로

$$3-x > 0 \quad \therefore x < 3 \quad \dots \textcircled{㉠}$$

$$-1 < \log_{0.1}(3-x) < 0 \text{에서 } \log_{0.1} 10 < \log_{0.1}(3-x) < \log_{0.1} 1$$

$0 < (\text{밑}) < 1$ 이므로

$$1 < 3-x < 10, \quad -2 < -x < 7$$

$$\therefore -7 < x < 2 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 에 의하여 $-7 < x < 2$

43) 정답 $\frac{1}{9} < x < 1$

진수의 조건에서

$$x > 0, \log_{\frac{1}{3}} x > 0$$

$$\therefore 0 < x < 1 \quad \dots \textcircled{A}$$

$$\log_2 \left(\log_{\frac{1}{3}} x \right) < 1 \text{에서}$$

$$\log_{\frac{1}{3}} x < 2, \therefore x > \frac{1}{9} \quad \dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 에 의하여

$$\frac{1}{9} < x < 1$$

44) 정답 (1) $4 < x < 5$ (2) $4 < x < 6$

(1) 진수는 양수이어야 하므로

$$x > 0, x-4 > 0 \quad \therefore x > 4 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$\log_5 x + \log_5 (x-4) < 1 \text{에서 } \log_5 x (x-4) < \log_5 5$$

밑이 1 보다 크므로

$$x(x-4) < 5, x^2 - 4x - 5 < 0$$

$$(x+1)(x-5) < 0$$

$$\therefore -1 < x < 5 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 에 의하여 $4 < x < 5$

(2) 진수는 양수이어야 하므로

$$x-2 > 0, x-4 > 0 \quad \therefore x > 4 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$\log_{\frac{1}{3}} (x-2) < 2 \log_{\frac{1}{3}} (x-4) \text{에서 } \log_{\frac{1}{3}} (x-2) < \log_{\frac{1}{3}} (x-4)^2$$

$0 < (\text{밑}) < 1$ 이므로

$$x-2 > (x-4)^2, x^2 - 9x + 18 < 0$$

$$(x-3)(x-6) < 0$$

$$\therefore 3 < x < 6 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 에 의하여 $4 < x < 6$

45) 정답 (1) $0 < x < \frac{1}{10}$ 또는 $x > 10^6$

(2) $\frac{1}{25} < x < \frac{1}{5}$

(1) 진수는 양수이어야 하므로 $x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{A}$

$$(\log x)^2 - \log x^5 > 6 \text{에서 } (\log x)^2 - \log x^5 - 6 > 0$$

$\log x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 5t - 6 > 0, (t+1)(t-6) > 0$$

$$\therefore t < -1 \text{ 또는 } t > 6$$

즉, $\log x < -1$ 또는 $t > 6$ 이므로

$$\log x < \log 10^{-1} \text{ 또는 } \log x > \log 10^6$$

밑이 1 보다 크므로

$$x < \frac{1}{10} \text{ 또는 } x > 10^6 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

$$\textcircled{I}, \textcircled{L} \text{에 의하여 } 0 < x < \frac{1}{10} \text{ 또는 } x > 10^6$$

$$(2) \text{ 진수는 양수이어야 하므로 } x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{I}$$

$$(\log_{0.2} x)^2 - 3\log_{0.2} x + 2 < 0 \text{에서}$$

$$\log_{0.2} x = t \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 3t + 2 < 0, (t-1)(t-2) < 0$$

$$\therefore 1 < t < 2$$

$$\text{즉, } 1 < \log_{0.2} x < 2 \text{이므로}$$

$$\log_{0.2} 0.2 < \log_{0.2} x < \log_{0.2} (0.2)^2$$

$$0 < (\text{밑}) < 1 \text{이므로}$$

$$\frac{1}{25} < x < \frac{1}{5} \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

$$\textcircled{I}, \textcircled{L} \text{에 의하여 } \frac{1}{25} < x < \frac{1}{5}$$

46) 정답 95

$$\log x + \log_x 10 < \frac{5}{2} \text{에서}$$

$$\log x + \frac{1}{\log x} < \frac{5}{2}$$

$$\log x = t \text{로 놓으면 } x > 1 \text{이므로 } t > 0 \text{이고 } t + \frac{1}{t} < \frac{5}{2}, 2t^2 - 5t + 2 < 0$$

$$(2t-1)(t-2) < 0$$

$$\therefore \frac{1}{2} < t < 2$$

$$\text{즉, } \frac{1}{2} < \log x < 2 \text{이므로}$$

$$\sqrt{10} < x < 100$$

따라서, 주어진 부등식을 만족하는 정수 x 는 4, 5, 6, ..., 99로 최댓값은 99, 최솟값은 4 이므로 그 차는 95 이다.

$$47) \text{ 정답 } \frac{1}{2} \leq x \leq 8$$

$$x^{\log_2 x} \leq 8x^2 \text{의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면}$$

$$\log_2 x^{\log_2 x} \leq \log_2 8x^2$$

$$(\log_2 x)^2 \leq 3 + 2\log_2 x$$

$$\log_2 x = t \text{로 놓으면}$$

$$t^2 \leq 3 + 2t, t^2 - 2t - 3 \leq 0$$

$$(t+1)(t-3) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq t \leq 3$$

$$\text{즉, } -1 \leq \log_2 x \leq 3 \text{이므로}$$

$$\log_2 \frac{1}{2} \leq \log_2 x \leq \log_2 8$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } \frac{1}{2} \leq x \leq 8 \quad \dots\dots \textcircled{I}$$

$$\text{이 때, 진수는 양수이어야 하므로 } x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

$$\textcircled{I}, \textcircled{L} \text{에 의하여 } \frac{1}{2} \leq x \leq 8$$

48) 정답 9

$x^{\log_3 x} < ax$ 의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$$\log_3 x^{\log_3 x} < \log_3 ax$$

$$(\log_3 x)^2 - \log_2 x - \log_3 a < 0$$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - t - \log_3 a < 0$$

주어진 부등식의 해가 $\frac{1}{3} < x < 9$ 이므로

$$-1 < t < 2$$

$$\Leftrightarrow (t+1)(t-2) < 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 - t - 2 < 0$$

따라서, $\log_3 a = 2$ 이므로 $a = 9$

49) 정답 -99

$x^{\log ax} > 100x$ 의 양변에 상용로그를 취하면

$$\log x^{\log ax} > \log 100x$$

$$(\log a + \log x)\log x > 2 + \log x$$

$$(\log x)^2 + (\log a - 1)\log x - 2 > 0$$

$\log x = t$ 로 놓으면

$$t^2 + (\log a - 1)\log x - 2 > 0$$

주어진 부등식의 해가 $0 < x < \frac{1}{10}$ 또는 $x > \beta$ 이므로

$$t < -1 \text{ 또는 } t > \log \beta$$

$$\Leftrightarrow (t+1)(t-\log \beta) > 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 + (1-\log \beta)t - \log \beta > 0$$

즉, $\log a - 1 = 1 - \log \beta$, $\log \beta = 2$ 이므로

$$\log a = 0, \beta = 100$$

따라서, $\alpha = 1, \beta = 100$ 이므로 $\alpha - \beta = -99$

50) 정답 7 년후

현재 벼를 재배하는 농가의 수를 A 라 하면 n 년 후의 농가의 수는 $A(1-0.05)^n$ 이다.

벼를 재배하는 농가의 수가 현재의 70%이하가 되려면

$$A(1-0.05)^n \leq \frac{7}{10}A$$

$$(1-0.05)^n \leq \frac{7}{10}$$

양변에 상용로그를 취하면

$$\log(1-0.05)^n \leq \log \frac{7}{10}$$

$$n \log 0.95 \leq \log 7 - 1$$

$$n \geq \frac{\log 7 - 1}{\log 0.95}$$

$$= \frac{\log 7 - 1}{\log 9.5 - 1}$$

$$= \frac{1 - \log 7}{1 - \log 9.5}$$

$$= \frac{0.1549}{0.0223}$$

$$= 6.9 \times \times \times$$

지수함수 로그함수

따라서, 최소 7년 후부터는 벼를 재배하는 농가의 수가 현재의 70%이하가 된다.

51) 정답 100

$$2 = 6 - \frac{5}{2} \log(k \cdot 10^{-0.4}) \text{에서}$$

$$\frac{5}{2} \log(k \cdot 10^{-0.4}) = 4$$

$$\log(k \cdot 10^{-0.4}) = \frac{8}{5}$$

$$\log k - 0.4 = 1.6$$

$$\log k = 2$$

$$\therefore k = 100$$

52) 정답 14 장

처음 들어오는 빛의 양을 a 라 하면 유리 n 장을 통과한 후 빛의 양은 $\left(\frac{9}{10}\right)^n a$ 이므로 $\left(\frac{9}{10}\right)^n a \leq \frac{1}{4}a$, $\left(\frac{9}{10}\right)^n \leq \frac{1}{4}$ 에서

$$\text{양변에 상용로그를 취하면 } \log\left(\frac{9}{10}\right)^n \leq \log\frac{1}{4}$$

$$n(\log 9 - \log 10) \leq -2\log 2$$

$$\therefore n \geq \frac{2\log 2}{1 - 2\log 3} = 2 \times 0.3010$$
$$\frac{1 - 2 \times 0/4771}{1 - 2 \times 0/4771} = 13.1 \times \times \times$$

따라서, 필름은 최소한 14장 붙여야 한다.